STOCHASTIK: Unabhängigkeit von Ereignissen

Zwei Ereignisse A und B sind **unabhängig** voneinander, wenn sie folgende Gleichung erfüllen:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

$$\Rightarrow P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) * P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Übung 1

Die Ereignisse A und B sind unabhängig voneinander. $\overline{A}$ ist das Gegenereignis zu A und $\overline{B}$ ist das Gegenereignis zu B. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) $\overline{A}$ und B sind unabhängig

b) A und $\overline{B}$ sind unabhängig

c) $\overline{A}$ und $\overline{B}$ sind unabhängig

d) $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$

Übung 2

Bei einem dreifachen Münzwurf ist das Ergebnis der dritten Münze unabhängig davon, was die ersten beiden Münzen zeigen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die entsprechenden Möglichkeiten (Wappen oder Zahl).

Übung 3

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim 6. Wurf mit einen Würfel eine 6 kommt, wenn bei den ersten 5 Würfen keine 6 vorkam.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim 6. Wurf mit einen Würfel eine 6 kommt, wenn bei den ersten 5 Würfen jeweils eine 6 kam.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass im 6. Wurf eine 6 kommt, wenn vorher eine, zwei, drei oder vier 6 kamen.

Übung 4

Jemand verfolgt folgende Strategie im Casino:
Er setzt auf rot oder schwarz, wenn vorher 10-mal die gleiche Farbe gekommen ist. Er behauptet, dass es wahrscheinlicher ist, dass beim 11. Mal die andere Farbe kommt. Hat er Recht?

LÖSUNG:

Übung 1

a) Es gilt: $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) * P(B) = P(A) * (1 - P(B)) = P(A) * P(\overline{B})$

b) $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) * P(B) = P(B) * (1 - P(A)) = P(B) * P(\overline{A})$

c) $P(\overline{B} \cap \overline{A}) = P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) - P(A) * P(\overline{B}) = P(\overline{B}) * (1 - P(A)) = P(\overline{B}) * P(\overline{A})$

d) $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) * P(B)}{P(A)} = P(B)$

$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(\overline{A}) * P(B)}{P(\overline{A})} = P(B) = P_A(B)$

Übung 2

W Steht für Wappen und Z steht für Zahl. Wenn WWZ steht, bedeutet das, die ersten beiden Münzen waren Wappen und die dritte Zahl

Sei das Ergebnis der Dritten Münze Z

$$P_{ZZ}(ZZZ) = \frac{P(ZZZ)}{P(ZZ)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$P_{WZ}(WZZ) = \frac{P(WZZ)}{P(WZ)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$P_{ZW}(ZWZ) = \frac{P(ZWZ)}{P(ZW)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$P_{WW}(WWZ) = \frac{P(WWZ)}{P(WW)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Sei das Ergebnis der Dritten Münze W:

$$P_{ZZ}(ZZW) = \frac{P(ZZW)}{P(ZZ)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$P_{WZ}(WZW) = \frac{P(WZW)}{P(WZ)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$P_{ZW}(ZWW) = \frac{P(ZWW)}{P(ZW)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$P_{WW}(WWW) = \frac{P(WWW)}{P(WW)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Übung 3

a) $$P_{\text{Keine 6 in den ersten 5 Würfen}}(\text{6 im 6.Wurf}) = \frac{P(\text{Keine 6 in den ersten 5 Würfen} \cap \text{6 im 6.Wurf})}{P(\text{Keine 6 in den ersten 5 Würfen})}$$

$$= \frac{\binom{5}{0} * \left(\frac{1}{6}\right)^0 * \left(\frac{5}{6}\right)^5 * \left(\frac{1}{6}\right)}{\binom{5}{0} * \left(\frac{1}{6}\right)^0 * \left(\frac{5}{6}\right)^5} = \frac{1}{6}$$

b) $$P_{\text{fünfmal 6 in den ersten 5 Würfen}}(\text{6 im 6.Wurf}) = \frac{P(\text{fünfmal 6 in den ersten 5 Würfen} \cap \text{6 im 6.Wurf})}{P(\text{Keine 6 in den ersten 5 Würfen})}$$

$$= \frac{\binom{5}{5} * \left(\frac{1}{6}\right)^5 * \left(\frac{5}{6}\right)^0 * \left(\frac{1}{6}\right)}{\binom{5}{5} * \left(\frac{1}{6}\right)^5 * \left(\frac{5}{6}\right)^0} = \frac{1}{6}$$

c) $$P_{\text{Eine 6 in den ersten 5 Würfen}}(\text{6 im 6.Wurf}) = \frac{P(\text{Eine 6 in den ersten 5 Würfen} \cap \text{6 im 6.Wurf})}{P(\text{Keine 6 in den ersten 5 Würfen})}$$

$$= \frac{\binom{5}{1} * \left(\frac{1}{6}\right)^1 * \left(\frac{5}{6}\right)^4 * \left(\frac{1}{6}\right)}{\binom{5}{1} * \left(\frac{1}{6}\right)^1 * \left(\frac{5}{6}\right)^4} = \frac{1}{6}$$

$$P_{\text{Zwei 6 in den ersten 5 Würfen}}(\text{6 im 6.Wurf}) = \frac{P(\text{Zwei 6 in den ersten 5 Würfen} \cap \text{6 im 6.Wurf})}{P(\text{Keine 6 in den ersten 5 Würfen})} =$$

$$\frac{\binom{5}{2} * \left(\frac{1}{6}\right)^2 * \left(\frac{5}{6}\right)^3 * \left(\frac{1}{6}\right)}{\binom{5}{2} * \left(\frac{1}{6}\right)^2 * \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{1}{6}$$

$$P_{\text{Drei 6 in den ersten 5 Würfen}}(\text{6 im 6.Wurf}) = \frac{P(\text{Drei 6 in den ersten 5 Würfen} \cap \text{6 im 6.Wurf})}{P(\text{Keine 6 in den ersten 5 Würfen})}$$

$$= \frac{\binom{5}{3} * \left(\frac{1}{6}\right)^3 * \left(\frac{5}{6}\right)^2 * \left(\frac{1}{6}\right)}{\binom{5}{3} * \left(\frac{1}{6}\right)^3 * \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{6}$$

$$P_{\text{Vier 6 in den ersten 5 Würfen}}(\text{6 im 6.Wurf}) = \frac{P(\text{Vier 6 in den ersten 5 Würfen} \cap \text{6 im 6.Wurf})}{P(\text{Keine 6 in den ersten 5 Würfen})} =$$

$$\frac{\binom{5}{4} * \left(\frac{1}{6}\right)^4 * \left(\frac{5}{6}\right)^1 * \left(\frac{1}{6}\right)}{\binom{5}{4} * \left(\frac{1}{6}\right)^4 * \left(\frac{5}{6}\right)^1} = \frac{1}{6}$$

Übung 4

$$P_{\text{10mal schwarz}}(\text{Schwarz im 11 Wurf}) = \frac{P(\text{10mal schwarz} \cap \text{Schwarz im 11. Wurf})}{P(\text{10mal schwarz})} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{1}{2}$$

$$P_{\text{10mal schwarz}}(\text{Rot im 11 Wurf}) = \frac{P(\text{10mal schwarz} \cap \text{Rot im 11. Wurf})}{P(\text{10mal schwarz})} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{1}{2}$$

$$P_{\text{10mal rot}}(\text{Rot im 11 Wurf}) = \frac{P(\text{10mal rot} \cap \text{Rot im 11. Wurf})}{P(\text{10mal rot})} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{1}{2}$$

$$P_{\text{10mal rot}}(\text{Schwarz im 11 Wurf}) = \frac{P(\text{10mal rot} \cap \text{Schwarz im 11. Wurf})}{P(\text{10mal rot})} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{1}{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist immer gleich 50% egal was vorher gekommen ist.