# GEOMETRIE: Die Pyramide

Die Pyramide hat ein Quadrat als Grundfläche.

Das **Volumen V** einer Pyramide: $V = \frac{1}{3} \ast g^2 \ast h$

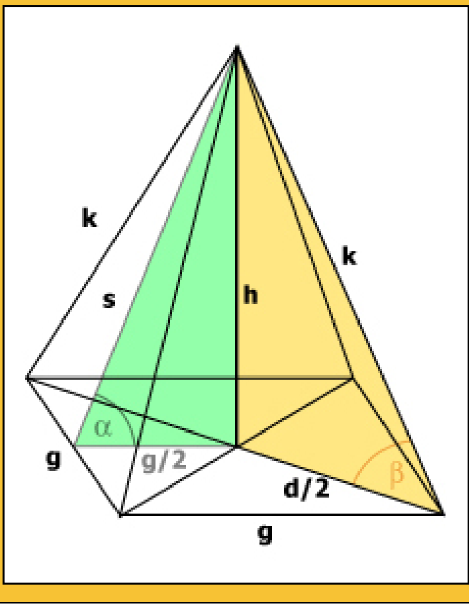
Die **Mantelfläche M** einer Pyramide:

$M = 4 \ast \frac{g}{2} \ast s = 4 \ast \frac{g}{2} \ast \sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)^2 + h^2}$

Die **Grundfläche G** einer Pyramide: $G = g^2$

Die **Oberfläche O** einer Pyramide:

$O = M + G = 4 \ast \frac{g}{2} \ast s + \pi \ast g^2$




**Übung 1**
Berechnen Sie die fehlenden Größen der Pyramide:

a) Gegeben sei $g = 3$ cm und $h = 4$ cm, berechnen Sie V, M, G und O.

b) Gegeben sei $g = 2$ cm und $V = 6$ cm³, berechnen Sie h, M, G und O.

c) Gegeben sei $g = 6$ cm und $M = 43{,}267$ cm², berechnen Sie h, V, G und O.

**Übung 2**
a) Stellen Sie eine Formel für die Länge der Kante k aus der Skizze auf in Abhängigkeit von g und h.

b) Stellen Sie eine Formel für den Winkel $\alpha$ aus der Skizze auf in Abhängigkeit von g und h.

c) Stellen Sie eine Formel für den Winkel $\beta$ aus der Skizze auf in Abhängigkeit von g und h.

**Übung 3**
a) Auf welcher Höhe von oben müssen Sie die Pyramide horizontal durchschneiden, damit das Volumen der abgeschnitten Spitze und des Rumpfes gleichgroß sind.

b) Auf welcher Höhe von oben müssen Sie die Pyramide horizontal durchschneiden, damit die Mantelfläche der abgeschnitten Spitze und des Rumpfes gleichgroß sind.

# LÖSUNG:

**Übung 1**

a)

$V = \frac{1}{3} * g^2 * h = \frac{1}{3} * (3\text{ cm})^2 * 4\text{ cm} = 12\text{ cm}^3$

$M = 4 * \frac{g}{2} * \sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)^2 + h^2} = 2 * 3\text{ cm} * \sqrt{\left(\frac{3\text{ cm}}{2}\right)^2 + (4\text{ cm})^2} \approx 25{,}632\text{ cm}^2$

$G = g^2 = (3\text{ cm})^2 = 9\text{ cm}^2$

$O = M + G = 34{,}632\text{ cm}^2$

b)

$V = \frac{1}{3} * g^2 * h \Leftrightarrow h = \frac{3V}{g^2} = \frac{3 * 8\text{ cm}^3}{(2\text{ cm})^2} = 6\text{ cm}$

$M = 4 * \frac{g}{2} * \sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)^2 + h^2} = 2 * 2\text{ cm} * \sqrt{\left(\frac{2\text{ cm}}{2}\right)^2 + (6\text{ cm})^2} \approx 24{,}331\text{ cm}^2$

$G = g^2 = (2\text{ cm})^2 = 4\text{ cm}^2$

$O = M + G \approx 28{,}331\text{ cm}^2$

c)

$M = 4 * \frac{g}{2} * \sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)^2 + h^2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)^2 + h^2} = \frac{M}{2 * g} \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{M^2}{4 * g^2} - \left(\frac{g}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{(43{,}267\text{ cm}^2)^2}{4 * (6\text{ cm})^2} - (3\text{ cm})^2} \approx 2\text{ cm}$

$V = \frac{1}{3} * g^2 * h = \frac{1}{3} * (2\text{ cm})^2 * 6\text{ cm} = 24\text{ cm}^3$

$G = g^2 = (6\text{ cm})^2 = 36\text{ cm}^2$

$O = M + G \approx 79{,}267\text{ cm}^2$

**Übung 2**

a)

$$k^2 = \left(\frac{g}{2}\right)^2 + s^2 = \left(\frac{g}{2}\right)^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{g^2}{2} + h^2$$

$$k = \sqrt{\frac{g^2}{2} + h^2}$$

b)

$$\tan \alpha = \frac{h}{\frac{g}{2}}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{h}{\frac{g}{2}}\right)$$

c)

$$\sin \alpha = \frac{h}{k} = \frac{h}{\sqrt{\frac{g^2}{2} + h^2}}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{h}{\sqrt{\frac{g^2}{2} + h^2}}\right)$$

**Übung 3**

a)

Das Volumen einer Pyramide mit der Grundseite g und der Höhe h hat das Volumen:

$$V = \frac{1}{3} * g^2 * h$$

Die Pyramidenspitze hat die Höhe h' und die Grundseite g' und muss das Volumen $\frac{V}{2}$

Laut Strahlensatz muss gelten $\frac{g'}{h'} = \frac{g}{h} \Leftrightarrow g' = \frac{g}{h} * h'$

$$\frac{V}{2} = \frac{1}{3} * g'^2 * h' = \frac{1}{3} * \frac{g^2}{h^2} * h'^2 * h' = \frac{1}{3} * \frac{g^2}{h^2} * h'^3$$

$$h'^3 = \frac{3*V*h^2}{2*g^2} = \frac{3*\frac{1}{3} * g^2 * h * h^2}{2*g^2} = \frac{h^3}{2}$$

$$h' = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}$$

b)

Damit sich die Mantelfläche halbiert müssen Sie durch den Schnitt nur eine Seitenfläche halbieren, diese hat den Flächeninhalt $F = \frac{g}{2} * s$

Laut Strahlensatz gilt wieder:

$$\frac{g'}{s'} = \frac{g}{s} \Leftrightarrow g' = \frac{g}{s} * s'$$

Das Dreieck der Spitze hat den Flächeninhalt:

$$F' = \frac{g'}{2} * s' = \frac{g}{2s} * s'^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{F}{2} = \frac{g}{4} * s = \frac{g}{2s} * s'^2$$

$$\Leftrightarrow s'^2 = \frac{s^2}{2}$$

Einsetzen:

$$\left(\frac{g'}{2}\right)^2 + h'^2 = \frac{1}{2} * \left(\left(\frac{g}{2}\right)^2 + h^2\right)$$

Laut Strahlensatz gilt wieder:

$$\frac{g'}{h'} = \frac{g}{h} \Leftrightarrow g' = \frac{g}{h} * h'$$

Einsetzen:

$$\frac{g^2}{4h^2} * h'^2 + h'^2 = \frac{1}{2} * \left(\left(\frac{g}{2}\right)^2 + h^2\right)$$

$$h'^2 * \left(1 + \frac{g^2}{4h^2}\right) = \frac{1}{2} * \left(\left(\frac{g}{2}\right)^2 + h^2\right)$$

$$h'^2 = \frac{\frac{1}{2} * \left(\left(\frac{g}{2}\right)^2 + h^2\right)}{\left(1 + \frac{g^2}{4h^2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} * \left(\left(\frac{g}{2}\right)^2 + h^2\right)}{\frac{1}{h^2} * \left(h^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2\right)} = \frac{h^2}{2}$$

$$h' = \frac{h}{\sqrt{2}}$$