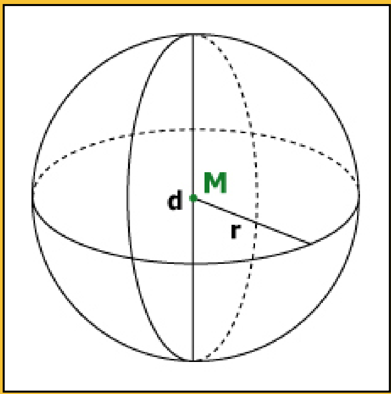
GEOMETRIE: Die Kugel

● Alle Punkte auf einer Kugel mit dem Radius r haben die Eigenschaft, dass sie zum Mittelpunkt den Abstand r haben.

● Liegt ein Punkt innerhalb der Kugel, so ist der Abstand zum Mittelpunkt kleiner als der Radius.

● Liegt ein Punkt außerhalb der Kugel, so ist der Abstand zum Mittelpunkt größer als der Radius.



Übung 1

a) Stellen Sie eine Gleichung auf für eine Kugel mit dem Mittelpunkt M (0;0;0) und dem Radius 5.

b) Liegen die Punkte A (3;4;5), B (1;1;1), und C (0;3;4) in der Kugel, auf der Kugel oder außerhalb der Kugel.

Übung 2

a) Entwickeln Sie eine Formel für eine Kugel mit dem Mittelpunkt M (x_M ; y_M ; z_M) und dem Radius r.

b) Stellen Sie eine Formel für eine Kugel K_1 mit dem Radius 10 und dem Mittelpunkt M (2;4;10).

c) Zeigen Sie, dass der Punkt A (10;10;10) auf der Kugel liegt.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Kugel durch dem Punkt A.

e) Bestimmen Sie die Formel für eine Kugel K_2, der die Kugel K_1 im Punkt A berührt und den Radius 5 hat.

LÖSUNG:

Übung 1

a) Ein Punkt liegt auf der Kugel, wenn er die folgende Gleichung erfüllt

$$5 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

b) Testen des Punktes A(3;4;5)

$$5 < \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5*\sqrt{2}$$

Der Punkt liegt außerhalb.

Testen des Punktes B(1;1;1)

$$5 > \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

Der Punkt liegt innerhalb.

Testen des Punktes C(0;3;4)

$$5 = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{0 + 9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Der Punkt liegt auf der Kugel.

Übung 2

a) $$r = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2}$$

b) $$10 = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 10)^2}$$

c) $$10 = \sqrt{(10 - 2)^2 + (10 - 4)^2 + (10 - 10)^2} = \sqrt{64 + 36 + 0} = \sqrt{100} = 10$$

d) Der Vektor $\overrightarrow{MA}$ lautet $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dies ist der Normalenvektor der Ebene. Der Punkt A muss auf der Ebene liegen, daher ergibt sich folgende Koordinatenform.

$$8x + 6y - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 8x + 6y - (80 + 60) = 8x + 6y - 140 = 0$$

$$8x + 6y = 140$$

Für die Parameterform bestimmen Sie zwei weitere Punkte auf der Ebene:

B (1;22;0) und C(10;10;1)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ -10 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

e) Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises muss auf der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen und vom Punkt A(10;10;10) den Abstand 5 haben:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow x = 2 + 8r,\ y = 4 + 6r,\ z = 10$

$$5 = \sqrt{(2 + 8r - 10)^2 + (4 + 6r - 10)^2 + (10 - 10)^2} = \sqrt{(8r - 8)^2 + (6r - 6)^2} =$$

$$\sqrt{64r^2 - 128r + 64 + 36r^2 - 72r + 36} = \sqrt{100r^2 - 200r + 100}$$

$25 = 100r^2 - 200r + 100 \mid -100$

$\Leftrightarrow -75 = 100r^2 - 200r \mid :100$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4} = r^2 - 2r \mid +1^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 \mid \pm\sqrt{}$

$\Leftrightarrow \pm\frac{1}{2} = r - 1$

$r_1 = \frac{1}{2}$ und $r_2 = \frac{3}{2}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} * \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Die gesuchten Mittelpunkte sind M_1 (6;7;10) und M_2 (14;13;10) und somit die gesuchten Formeln:

$$5 = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 7)^2 + (z - 10)^2} \text{ und } 5 = \sqrt{(x - 14)^2 + (y - 13)^2 + (z - 10)^2}$$