ANALYSIS:
Vollständige Induktion

Die **Vollständige Induktion** ist eine Beweismethode, mit der man eine Aussage (in der Regel) für alle natürlichen Zahlen beweist.
Man beweist die Aussage erst für den Induktionsanfang (I.A.), meistens n = 0 oder n = 1.
Dann beweist man, dass die Aussage für n+1 gilt, wenn die Aussage für n gilt (Induktionsschluss).

Beispiel: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n * (n+1)}{2}$

Induktionsanfang: n = 1: linke Seite: $\sum_{i=1}^{1} i = 1$; rechte Seite: $\frac{1 * (1+1)}{2} = 1$

Die Aussage gilt für n, zeigen Sie, dass es für n + 1 gilt (Induktionsschluss):

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \overset{\text{I.A.}}{=} \frac{n * (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n * (n+1)}{2} + \frac{2 * (n+1)}{2} = \frac{(n+2) * (n+1)}{2}$$

Übung 1
Beweisen Sie folgende Gleichungen:

a) $\sum_{i=1}^{n} 2i = n * (n+1)$

b) $\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$

c) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n * (n+1) * (2n+1)}{6}$

d) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2 * (n+1)^2}{4}$

Übung 2
Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion folgende Aussagen:

a) $2^{3i} - 1$ ist immer durch 7 teilbar.

b) $n^5 - n$ ist immer durch 5 teilbar.

c) $7^{2n} - 2^n$ ist immer durch 47 teilbar.

LÖSUNG:

Übung 1

a) $\sum_{i=1}^{n} 2i = n * (n+1)$

Induktionsanfang:

Linke Seite: $\sum_{i=1}^{1} 2i = 2$, rechte Seite: $1 * (1+1) = 2$

Induktionsschluss:

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2i = \sum_{i=1}^{n} 2i + 2*(n+1) \overset{\text{I.A.}}{=} n * (n+1) + 2*(n+1) = (n+1) * ((n+ 1) + 1)$$

b) $\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$

Induktionsanfang:

Linke Seite: $\sum_{i=1}^{1} (2i - 1) = 1$, rechte Seite: $1^2 = 1$

Induktionsschluss:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) + (2*(n+1) - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

c) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n * (n + 1) * (2n + 1)}{6}$

Induktionsanfang:

Linke Seite: $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1$, rechte Seite: $\frac{1 * (1 + 1) * (2*1 + 1)}{6} = 1$

Induktionsschluss:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n * (n + 1) * (2n + 1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n * (n + 1) * (2n + 1)}{6} + \frac{6*(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n + 1) * (n * (2n + 1) + 6 * (n+1))}{6} = \frac{(n + 1) * (2n^2 + n + 6n + 6)}{6} =$$

$$\frac{(n + 1) * ((n + 2) * (2n +3))}{6} = \frac{(n + 1) * (n + 2) * (2 * (n+1) +1)}{6}$$

d) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2 * (n+1)^2}{4}$

Induktionsanfang:

Linke Seite: $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1$, rechte Seite: $\frac{1^2 * (1+1)^2}{4} = 1$

Induktionsschluss:

$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2 * (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2 * (n+1)^2}{4} + \frac{4*(n+1)^3}{4} =$

$\frac{(n+1)^2 * (n^2 + 4n + 4)}{4}$

$= \frac{(n+1)^2 * (n+2)^2}{4}$

Übung 2

a) $2^{3i} - 1$ ist immer durch 7 teilbar.

Induktionsanfang:

$2^3 - 1 = 7$, ist durch 7 teilbar.

Induktionsschluss:

$2^{3(i+1)} - 1 = 2^{3i} * 8 - 1 = 2^{3i} * (7+1) - 1 = 7 * 2^{3i} + 2^{3i} - 1$

$7 * 2^{3i}$ ist durch 7 teilbar und $2^{3i} - 1$ ist laut Induktionsannahme teilbar durch 7.

b)

$n^5 - n$ ist durch 5 teilbar

Induktionsanfang:

$1^5 - 1 = 0$ ist durch 5 teilbar

Induktionsschluss:

$(n+1)^5 - (n+1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 = (n^5 - n) + 5*(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$

$(n^5 - n)$ ist laut Induktionsannahme durch 5 teilbar und $5*(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$ ist durch 5 teilbar, weil 5 ein Faktor ist.

c) 7^{2n} - 2^n ist immer durch 47 teilbar

Induktionsanfang:
$7^2 - 2^1 = 49 - 2 = 47$ ist durch 47 teilbar

Induktionsschluss:
$7^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 49*7^{2n} - 2*2^n = (47+2) *7^{2n} - 2*2^n$
$= 47 *7^{2n} + 2 *7^{2n} - 2*2^n = 47 *7^{2n} + 2 * (7^{2n} - 2^n)$

$2 * (7^{2n} - 2^n)$ ist laut Induktionsannahme durch 47 teilbar und $47 *7^{2n}$ ist durch 47 teilbar, da 47 ein Faktor ist.