ANALYSIS:
Partielle Integration

Zum **Bestimmen einer Stammfunktion** oder zum **Bestimmen eines Integrals** von einer Funktion, die aus dem Produkt von zwei Funktionen besteht, können Sie die partielle Integrationsformel verwenden:

$\int f'(x) * g(x)\, dx = f(x) * g(x) - \int f(x) * g'(x)\, dx$

Der Vorteil, den Sie dadurch gewinnen können, ist, dass sich das Integral $\int f(x) * g'(x)\, dx$ leichter bestimmen lässt.

Beispiel:

$\int x * e^x\, dx$, wählen Sie $g(x) = x$ und $f'(x) = e^x$

$\int x * e^x\, dx = x * e^x - \int 1 * e^x\, dx = x * e^x - e^x$

Zum Überprüfen können Sie die Ableitung von $H(x) = x * e^x - e^x$

$H'(x) = 1 * e^x + x * e^x - e^x = x * e$

Übung 1
Bestimmen Sie mit Hilfe der Formel für partielle Integration die Stammfunktion. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die gefunden Stammfunktion ableiten.

a) $f(x) = x * \sin x$

b) $f(x) = x * \cos x$

c) $f(x) = x^2 * e^x$

d) $f(x) = x^3 * e^x$

e) $f(x) = \sin x * \cos x$

f) $f(x) = \ln x$

LÖSUNG:

Übung 1

a) $f'(x) = \sin x$ und $g(x) = x$

$\int x * \sin x \, dx = x * (-\cos x) - \int 1 * (-\cos x) \, dx = -x * \cos x + \int \cos x \, dx =$

$-x * \cos x + \sin x$

Testen Sie nun, ob es die richtige Stammfunktion ist, indem Sie diese ableiten.

$F(x) = -x * \cos x + \sin x$

$F'(x) = -1 * \cos x + (-x) * (-\sin x) + \cos x = x * \sin x$

b) $f'(x) = \cos x$ und $g(x) = x$

$\int x * \cos x \, dx = x * \sin x - \int 1 * \sin x \, dx = x * \sin x - \int \sin x \, dx =$

$x * \sin x + \cos x$

Testen Sie nun, ob es die richtige Stammfunktion ist, indem Sie diese ableiten.

$F(x) = x * \sin x + \cos x$

$F'(x) = 1 * \sin x + x * \cos x - \sin x = x * \cos x$

c) $f'(x) = e^x$ und $g(x) = x^2$

$\int x^2 * e^x \, dx = x^2 * e^x - \int 2x * e^x \, dx = x^2 * e^x - 2 \int x * e^x \, dx =$

$x^2 * e^x - 2 * (x * e^x - e^x) = x^2 * e^x - 2 * x * e^x + 2 * e^x$

Testen Sie nun, ob es die richtige Stammfunktion ist, indem Sie diese ableiten.

$F(x) = x^2 * e^x - 2 * x * e^x + 2 * e^x$

$F'(x) = 2x * e^x + x^2 * e^x - 2 * e^x - 2 * x * e^x + 2 * e^x = x^2 * e^x$

d) $f'(x) = e^x$ und $g(x) = x^3$

$\int x^3 * e^x \, dx = x^3 * e^x - \int 3x^2 * e^x \, dx = x^3 * e^x - 3 \int x^2 * e^x \, dx =$

$x^3 * e^x - 3 * (x^2 * e^x - 2 * x * e^x + 2 * e^x) = x^3 * e^x - 3 * x^2 * e^x + 6 * x * e^x - 6 e^x$

Testen Sie nun, ob es die richtige Stammfunktion ist, in dem Sie diese ableiten.

$F(x) = x^3 * e^x - 3 * x^2 * e^x + 6 * x * e^x - 6 e^x$

$F'(x) = 3 x^2 * e^x + x^3 * e^x - 6*x*e^x - 3 * x^2 * e^x + 6 * e^x + 6*x e^x - 6 e^x$
$= x^3 * e^x$

e) $f'(x) = \sin x$ und $g(x) = \cos x$

$\int \sin x * \cos x \, dx = - \cos x * \cos x - \int - \cos x * (- \sin x) \, dx$

$\int \sin x * \cos x \, dx = - \cos x * \cos x - \int \cos x * \sin x \, dx \mid + \int \sin x * \cos x \, dx$

$2 * \int \sin x * \cos x \, dx = - (\cos x)^2 \mid : 2$

$\int \sin x * \cos x \, dx = - \frac{(\cos x)^2}{2}$

$F(x) = - \frac{(\cos x)^2}{2}$

$F'(x) = - \frac{1}{2} * 2 * \cos x * (- \sin x) = \sin x * \cos x$

f) $\int 1 * \ln x \, dx$

Wähle $f'(x) = 1$ und $g(x) = \ln x$

$\int 1 * \ln x \, dx = x * \ln x - \int x * \frac{1}{x} dx = x * \ln x - \int 1 \, dx = x * \ln x - x$

$F(x) = x * \ln x - x$

$F'(x) = 1 * \ln x + x * \frac{1}{x} - 1 = \ln x$