ANALYSIS:
Normalenform einer Ebene

Eine Ebene lässt sich auch durch einen **Normalenvektor** $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, der senkrecht auf der Ebene steht, und einen Punkt $\vec{o}$ auf der Ebene:

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \vec{o}\right) | \vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | \vec{n} - \vec{o} | \vec{n} = x*n_1 + y*n_2 + y*n_3 - \vec{o} | \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x*n_1 + y*n_2 + y*n_3 = \vec{o} | \vec{n}$$

Diese Form nennt man auch die Koordinatenform.

Übung 1
Formen Sie die Parameterform in die Koordinatenform um.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Übung 2
Formen sie die Koordinatenform in die Parameterform um.

$$2z - 6x - 2y = 2$$

Übung 3
Bestimmen Sie die Lagebeziehung der Ebene aus Übung 1 und Übung 2.

LÖSUNG:

Übung 1

Zuerst müssen Sie den Normalenvektor $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ bestimmen der senkrecht auf beiden Spannvektoren der Ebene steht.

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = n_2 + n_3 = 0 \mid - n_3 \Leftrightarrow n_2 = - n_3$$

und

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = n_1 + 3n_3 = 0 \mid - 3n_3 \Leftrightarrow n_1 = - 3n_3$$

Wähle $n_3 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Ortsvektor liegt ja auf der Ebene, daher ergibt sich folgende Lösung für die Koordinatenform:

$$-3x - 1y + 1z - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3x - y + z - (1*(-3) + 1*(-1) + 4) = -3x - y + z = 0$$

Die Koordinatenform lautet:

$-3x - y + z = 0$

Übung 2

Wir bestimmen drei Punkte die auf der Ebene liegen

$$2z - 6x - 2y = 2$$

A = (0;0;1), B = (0;-1;0) und C = (1;1;4)

Daher ergibt sich folgende Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Übung 3

Die beiden Normalenvektoren der beiden Ebenen sind linear abhängig (E_1: $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und E_2: $\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$).

Daher können die beiden Ebenen nur parallel oder identisch sein.

Der Ortsvektor von E_1 liegt auch auf der Ebene E_2 daher sind die Ebenen identisch.