ANALYSIS:
Lagebeziehung von Ebenen

Es gibt 3 Möglichkeiten für die Lagebeziehung zwischen zwei Ebenen:

1. **Die Ebenen sind identisch**
2. **Die Ebenen sind parallel**
3. **Die Ebenen schneiden sich in einer Geraden**

Um die Lagebeziehung zu bestimmen, testen Sie, ob einer der Spannvektoren der einen Ebene linear unabhängig von den Spannvektoren der anderen Ebene ist.

Ja

Die Ebenen schneiden sich in einer Geraden. Setzen Sie die Ebenen gleich. Es ergibt sich ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 4 Unbekannten.
Dieses führen Sie auf eine Gleichung mit 2 Unbekannten zurück.
Diese Unbekannten müssen von einer Ebenengleichung sein.
Zur Bestimmung der Schnittgeraden setzen Sie die Gleichung mit den 2 Unbekannten in die Ebenegleichung ein.

Nein

Die Ebenen können identisch oder parallel sein.

Testen Sie, ob der Ortsvektor der einen Ebene der anderen Ebene liegt.

Ja

Die Ebenen sind identisch.

Nein

Die Ebenen sind parallel.

Übung 1
Bestimmen Sie die Lagebeziehung zwischen den Ebenen E_1 und E_2

a) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

b) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix}$

c) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Übung 2

a) Zeigen Sie das die Ebene $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ und die Ebene $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ parallel sind.

b) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Ebenen.

LÖSUNG:

Übung 1

a) Beide Ebenen haben den gleichen Spannvektoren, daher müssen Sie nur noch testen, ob der andere Spannvektor linear unabhängig von den Spannvektoren sind.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = t * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I. $0 = -t + u$
II. $2 = t + u$
III. $-1 = -u \mid :(-1) \Leftrightarrow u = 1$

Einsetzen in I.:
$0 = -t + 1 \mid +t \Leftrightarrow t = 1$
Einsetzen in II.
$2 = 1 + 1 = 2$

Die Ebenen können nur parallel oder identisch sein. Daher testen Sie, ob der Ortsvektor der einen Ebene auf der anderen Ebene liegt.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I. $1 = -t + u$
II. $0 = 1 + t + u$
III. $2 = 2 - u \mid -2 \Leftrightarrow -u = 0 \mid :(-1) \Leftrightarrow u = 0$

Einsetzen in I.
I. $1 = -t + 0 \mid :(-1) \Leftrightarrow t = -1$

Einsetzen in II.
II. $0 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ Der Ortsvektor liegt in der Ebene $\Rightarrow$ Die Ebenen sind identisch b)

$$\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix} = r * \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

I. $-1 = -r \mid :(-1) \Leftrightarrow r = 1$
II. $3 = r + 2s$
III. $-1 = -s \mid :(-1) \Leftrightarrow s = 1$

Einsetzen von I. und III. in II.

II. $3 = 1 + 2 * 1 = 3$

Der Spannvektor ist linear abhängig. Testen des anderen Spannvektors:

$$\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix} = r * \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

I. $-2 = -r \mid :(-1) \Leftrightarrow r = 2$
II. $4 = r + 2s$
III. $-1 = -s \mid :(-1) \Leftrightarrow s = 1$

Einsetzen von I. und III. in II.

II. $4 = 2 + 2 * 1 = 4$

$\Rightarrow$ Die Ebenen sind identisch oder parallel.

Daher testen Sie, ob der Ortsvektor der einen Ebene auf der anderen Ebene liegt.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

I. $1 = 1 - r \mid -1 \Leftrightarrow -r = 0 \mid :(-1) \Leftrightarrow r = 0$
II. $2 = 0 + r + 2s$
III. $0 = 2 - s \mid +s \Leftrightarrow s = 2$

Einsetzen der Ergebnisse von I. und III. in II.

$2 \neq 0 + 2 + 2 * 2 = 4$

Die Ebenen sind parallel.

c) Testen, ob die Spannvektoren von E_1 unabhängig von E_2 sind:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = t * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. $0 = -t \mid :(-1) \Leftrightarrow t = 0$
II. $2 = u$
III. $-1 = 2t \mid :2 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$
Der Spannvektor ist unabhängig

Die Ebenen schneiden sich, um die Schnittgeraden zu bestimmen, setzen Sie die Ebenengleichungen gleich:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. $1 - r = 1 - t \mid -1 \Leftrightarrow -r = -t \mid *(-1) \Leftrightarrow r = t$
II. $r + 2s = 2 + u$
III. $2 - s = 1 + 2t \mid -2 \Leftrightarrow -s = -1 + 2t \mid *(-1) \Leftrightarrow s = 1 - 2t$

Einsetzen von I. und III. in II.:
$t + 2*(1 - 2t) = 2 + u \Leftrightarrow t + 2 - 4t = 2 + u \mid -2 \Leftrightarrow -3t = u$

Einsetzen in die Ebenegleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 3t * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Übung 2

Testen, ob der Spannvektor linear unabhängig ist:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} = r * \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

I. $1 = s$
II. $-1 = -r \mid :(-1) \Leftrightarrow r = 1$
III. $3 = r + 2s$

Einsetzen von I. und II. in III.:
$3 = 1 + 2*1 = 3$

Der Spannvektor ist linear abhängig.

Testen, ob der andere Spannvektor linear unabhängig ist.

$$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = r * \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

I. $2 = s$
II. $1 = -r \mid :(-1) \Leftrightarrow r = -1$
III. $3 = r + 2s$

Einsetzen von I. und II. in III.:
$3 = -1 + 2*2 = 3$

Der Spannvektor ist linear abhängig von denen der anderen Ebene, daher sind sie entweder parallel oder identisch.
Testen, ob der Ortsvektor von E_2 in E_1

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

I. $1 = s$
II. $0 = 1 - r \mid + r \Leftrightarrow r = 1$
III. $1 = 2 + r + s$

Einsetzen von I. und II. in III.:

$1 \neq 2 + 1 + 1 = 4 \Rightarrow$ Die Ebenen sind parallel

Um den Abstand zu bestimmen, bestimmen Sie den Vektor $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ der senkrecht auf der Ebene E_1 steht:

$$0 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = z - y \text{ und } 0 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = x + 2z$$

$y = z$ und $x = -2z$

Setzen Sie $z = 1 \Rightarrow$ der gesuchte Vektor ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nun bilden Sie eine Gerade mit den Ortsvektor der Ebene E_1 und den Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Spannvektor und berechnen den Schnittpunkt mit der Ebene E_2

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - v * \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

I. $-2v = 1 + t + 2u$
II. $1 + v = -t + u \mid -1 \Leftrightarrow v = u - t - 1$
III. $2 + v = 1 + 3t + 3u$

Einsetzen von II. in I. und III.:

I. $-2*(u - t - 1) = 1 + t + 2u \Leftrightarrow -2u + 2t + 2 = 1 + t + 2u \mid -t + 2u - 2 \Leftrightarrow t = -1 + 4u$
III. $2 + u - t - 1 = 1 + 3t + 3u \mid -1 - u + t \Leftrightarrow 0 = 4t + 2u$

Einsetzen von I. in III.

$$0 = 4*(-1+4u) + 2u = -4 + 16u + 2u = -4 + 18u \mid +4 \Leftrightarrow 4 = 18u \mid :18 \Leftrightarrow u = \frac{2}{9}$$

Einsetzen in I.

$$t = -1 + 4*\frac{2}{9} = -\frac{1}{9}$$

Einsetzen in II.

$$v = \frac{2}{9} - \left(-\frac{1}{9}\right) - 1 = -\frac{2}{3}$$

Zum Bestimmen des Schnittpunktes setzen Sie die Lösung in die Geradengleichung ein

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} * \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Abstand dieses Schnittpunktes mit dem Schnittpunkt der Geraden mit E_1, der wegen der Konstruktion der Ortsvektor der Geraden ist

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(0 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2}{3} * \sqrt{6}$$

Der Abstand beträgt $\frac{2}{3} * \sqrt{6}$