ANALYSIS: Das Integral (1)

Gegeben sei eine Funktion f(x):

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Es muss gelten:

$$F'(x) = f(x)$$

Übung 1
Bestimmen Sie folgende Integrale:

a) $\int_0^2 x^2\,dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

d) $\int_0^{\ln 2} e^x\,dx$

Übung 2
Bestimmen Sie die $a \in \nabla$ so, dass die Gleichung gilt:

a) $\int_0^a 3x^2\,dx = 27$

b) $\int_{-\frac{1}{2}}^a 2x - 1\,dx = 0$

c) $\int_0^a 3x^2 - 4x - 8\,dx = 0$

d) $\int_0^a 4x^3 - 26x\,dx = 36$

LÖSUNG:

Übung 1

a) $\int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 \,|_0^2 = \frac{1}{3}\,2^3 - \frac{1}{3}\,0^3 = \frac{8}{3}$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x \,|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = -0 + 1 = 1$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x \,|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - (\sin 0) = 1 - 0 = 1$

d) $\int_0^{\ln 2} e^x\,dx = e^x \,|_0^{\ln 2} = 2 - 1 = 1$

Übung 2

a) $27 = \int_0^a 3x^2\,dx = x^3 \,|_0^a = a^3 - 0^3 = a^3 \,|\sqrt[3]{}$

$a = 3$

b) $2 = \int_0^a 2x - 1\,dx = x^2 - x \,|_0^a = a^2 - a - 0 = a^2 - a \;|\; -2$

$a^2 - a - 2 = 0$

Diese Formel können Sie mit der quadratischen Ergänzung lösen.
$a_1 = -1$ und $a_2 = 2$

c) $0 = \int_0^a 3x^2 - 4x - 8\,dx = x^3 - 2x^2 - 8x \,|_0^a = a^3 - 2a^2 - 8a$

Lösen der Gleichung:
$0 = a^3 - 2a^2 - 8a = a(a^2 - 2a - 8) = a(a+2)(a-4)$
Somit ist die Lösung:
$a_1 = 0$; $a_2 = -2$ und $a_3 = 4$

d) $36 = \int_0^a 4x^3 - 26x \; dx = x^4 - 13x^2 \Big|_0^a = a^4 - 13a^2$

$a^4 - 13a^2 - 36 = 0$

Substituieren Sie $a^2 = b$

$b^2 - 13b - 36 = 0$
Lösung:
$b_1 = 4$ und $b_2 = 9$
$a^2 = 4$ und $a^2 = 9$
$a_1 = 2$; $a_2 = -2$; $a_3 = -3$ und $a_4 = 3$