ANALYSIS:
Vektoren & Ebenen (2)

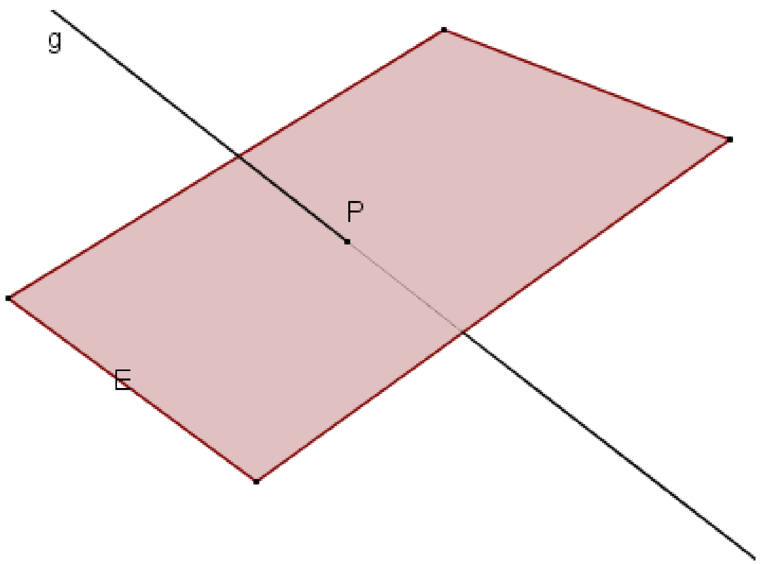
1. Gegeben sei die Gerade $\mathbf{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbf{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und die Ebene $\mathbf{E}\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbf{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathbf{v}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) **Beweisen Sie, dass g** $\| E$ **.**

b) **Erstellen Sie die Geradengleichung der Gerde h, die g in Punkt P (2,5,-3) schneidet und orthogonal zu E ist.**

---

2. Gegeben sei die Gerade $\mathbf{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbf{t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und die Ebene $\mathbf{E}\;\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbf{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbf{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$



Erstellt mit Geonext

a) g schneidet E im Punkt P. **Berechnen Sie die Koordinaten von P.**

b) **Berechnen Sie den Schnittwinkel von g zu E.**

c) Spiegeln Sie g an E, so dass einen neue Gerade h entsteht, die E ebenfalls in P schneidet. **Zeichnen Sie h in die Skizze ein und erstellen Sie eine Geradengleichung für h.**

LÖSUNG:

1. a) Der Richtungsvektor von g ist ein Vielfaches des zweiten Richtungsvektors von E,

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ d.h. } g \parallel E.$$

Jetzt muss noch bewiesen werden, dass g nicht in E liegt:
Dazu nimmt man den Aufpunkt von g, A_g (1,3,-2) und beweist, dass er nicht in E liegt .

(A) 1 = 0 + 3u - 2v
(B) 3 = 2 + 3u - 4v
(C) -2 = 2 + 5u + 2v

=> aus (A) ergibt sich v= (1-3u) : 2, in B: u = -1,

v = (1-3u):2 in (C) => u = $\frac{5}{8}$.

=> A_g liegt nicht in E.

b) Man nimmt P als den Aufpunkt von und den Normalenvektor von E als Richtungsvektor von h.

Der Normalenvektor ergibt sich aus:

$$\vec{n} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \vec{n} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0,$$

$3n_1 + 3n_2 + 5n_3 = 0$ [×2 => $6n_1 + 6n_2 + 10n_3 = 0$
$-2n_1 - 4n_2 + 2n_3 = 0$ [×3 => $-6n_1 - 12n_2 + 6n_3 = 0$] +

$- 6n_2 + 16n_3 = 0 \Rightarrow 2\frac{2}{3} n_3 = n_2$

wähle $n_3 = 3$, dann ist $n_2 = 8$

n_2 und n_3 in (A) :
$3n_1 + 24 + 15 = 0$,
$3n_1 = -39$
$n_1 = -13$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, da $\vec{n}$ der Richtungsvektor von h ist gilt für **h :** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

(Richtig sind auch andere Normalenvektoren sobald sie ein Vielfaches des angegeben Normalenvektors sind.

2. a) Man setzt E mit g gleich, und erhält daraus die Lösung. Die Gerade t schneidet E in Punkt P (- 2,5 /- 0,5 / 5).

   Also bei t= - 0,5, u = 0,5 und v = $-\frac{1}{3}$

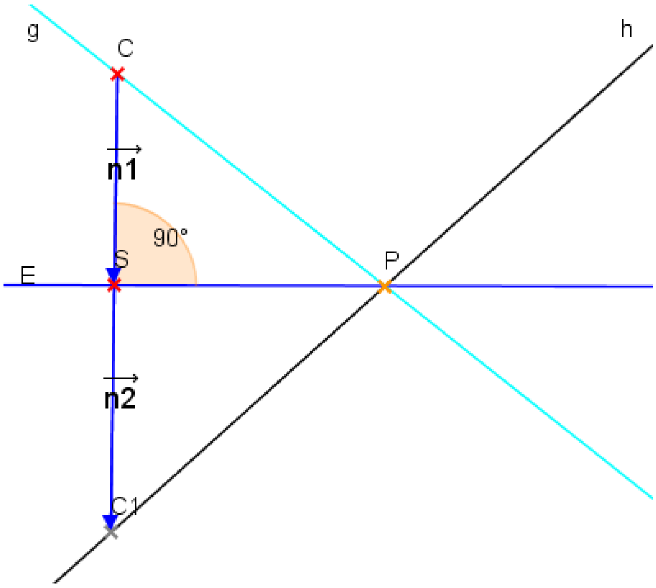
   b) Schnittwinkelberechnung:

   Man benötigt den Normelenvektor der Ebene $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\10\\-7\end{pmatrix}$ und den Richtungsvektor von g:

   Man setzt in die Formel cos $\alpha = \vec{a} \times \vec{b} : |\vec{a}| \times |\vec{b}|$ ein und erhält den Winkel: α = 47,24,

   da dies aber der Winkel zwischen dem Normalenvektor und der Gerade ist, muss man ihn von 90° abziehen und erhält für den Schnittwinkel: β = 42,76°

   c)



P sei Aufpunkt von h

Als Richtungsvektor dient der Vektor $\overrightarrow{C1P}$.

C1 erhält man folgendermaßen:

Man errechnet einen Normalenvektor von E: $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\10\\-7\end{pmatrix}$,

sucht sich einen beliebigen Punkt C auf g (außer P) z.B. C (5/1/2), bildet daraus eine Hilfsgerade f, die orthogonal zu E ist und berechnet den Schnittpunkt S der Geraden f mit E, indem man f mit E gleichsetzt. Die Hilfsgerade in diesem Fall wäre

f: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}5\\10\\-7\end{pmatrix}$.

Man erhält den Schnittpunkt S ($4\frac{20}{23}/\frac{17}{23}/2\frac{21}{115}$),

Man berechnet den Vektor $\vec{n1} = \overrightarrow{CS}$. $\vec{n1}\begin{pmatrix}-\frac{3}{23}\\-\frac{6}{23}\\\frac{21}{115}\end{pmatrix}$.

$\vec{s} + \vec{n1} = \vec{c1}$ => $\overrightarrow{C1}$ $(4\frac{17}{23}/\frac{11}{23}/2\frac{42}{115})$.

$\overrightarrow{C1P}: \begin{pmatrix}-2{,}5\\-0{,}5\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\frac{17}{23}\\\frac{11}{23}\\2\frac{42}{115}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\frac{11}{46}\\-\frac{45}{46}\\2\frac{73}{115}\end{pmatrix}$

Mit $\overrightarrow{C1P}$ als Richtungsvektor und P als Aufpunkt lässt sich die Geradengleichung von h aufstellen:

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2{,}5\\-0{,}5\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\frac{11}{46}\\-\frac{45}{46}\\2\frac{73}{115}\end{pmatrix}$