FUNKTIONEN:
Extrempunkte bestimmen

Gegeben sei eine Funktion f(x).

Die notwendige Bedingung für einen **Extrempunkt** ist $f'(x_0) = 0$

Die hinreichende Bedingung für einen **Hochpunkt** ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$

Die hinreichende Bedingung für einen **Tiefpunkt** ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ so ist nur die notwendige Bedingung aber nicht die hinreichende Bedingung erfüllt, daher müssen Sie überprüfen, ob an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel bei der Funktion $f'(x)$ vorliegt.

- Ist es ein Vorzeichenwechsel von minus nach plus so ist es ein Tiefpunkt.
- Ist es ein Vorzeichenwechsel von plus nach minus so ist es ein Tiefpunkt.
- Liegt kein Vorzeichenwechsel so ist es auch kein Extrempunkt.

Übung 1
Bestimmen Sie die Extremstellen der folgenden Funktionen

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = x^4$

d) $f(x) = x^2 - 2x$

e) $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2$

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$

g) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$

Übung 2
Gegeben sei eine Funktionenschar $f_a(x) = -x^2 + 2ax + 4 - 2a^2 - 2a$ mit $a \in \nabla$

a) Bestimme Sie den Hochpunkt dieser Funktion

b) Für welches $a \in \nabla$ liegt der Hochpunkt am höchsten

c) Bestimmen die Funktion auf der alle Hochpunkte der Funktionenschar $f_a(x)$.

LÖSUNG:

Übung 1

a) $f(x) = x^2$
$f'(x) = 2x$
$f''(x) = 2$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$2x = 0 \mid :2 \Leftrightarrow x = 0$

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow$ An der Stelle $x = 0$ ist ein Tiefpunkt

Berechnen der y-Koordinate

$f(0) = 0$

Die Funktion hat einen Tiefpunkt T(0;0)

b) $f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$f''(x) = 6x$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$3x^2 = 0 \mid :3 \Leftrightarrow x^2 = 0 \mid \pm\sqrt{}$

$x = 0$

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(0) = 0 \Rightarrow$ Die hinreichende Bedingung ist nicht erfüllt, daher müssen Sie eine Vorzeichenwechseluntersuchung durchführen

Für $x < 0$ ist $f'(x) > 0$ und für $x > 0$ ist $f'(x) > 0$

$\Rightarrow$ Die Funktion hat keine Extrempunkte

c) $f(x) = x^4$
$f'(x) = 4x^3$
$f''(x) = 12x^2$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$4x^3 = 0 \mid :4 \Leftrightarrow x^3 = 0 \mid \pm\sqrt[3]{\ } \Leftrightarrow x = 0$

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(0) = 0 \Rightarrow$ Die hinreichende Bedingung ist nicht erfüllt, daher müssen Sie eine Vorzeichenwechseluntersuchung durchführen

Für $x < 0$ ist $f'(x) < 0$ und für $x > 0$ ist $f'(x) > 0$ $\Rightarrow$ Die Funktion hat einen Vorzeichenwechsel von minus nach plus

$\Rightarrow$ An der Stelle $x = 0$ ist ein Tiefpunkt

Berechnen der y-Koordinate

$f(0) = 0$

Die Funktion hat einen Tiefpunkt T(0;0)

d) $f(x) = x^2 - 2x$
$f'(x) = 2x - 2$
$f''(x) = 2$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$2x - 2 = 0 \mid +2 \Leftrightarrow 2x = 2 \mid :2 \Leftrightarrow x = 1$

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow$ An der Stelle $x = 1$ ist ein Tiefpunkt

Berechnen der y-Koordinate

$f(1) = -1$

Die Funktion hat einen Tiefpunkt T(1;-1)

e) $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2$

$f'(x) = 4 - x$
$f''(x) = -1$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$4 - x = 0 \mid +x \Leftrightarrow x = 4$

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(4) = -1 < 0 \Rightarrow$ An der Stelle $x = 4$ ist ein Hochpunkt

Berechnen der y-Koordinate

$f(4) = 8$

Die Funktion hat einen Hochpunkt H(4;8)

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$

$f'(x) = x^2 - 4x$
$f''(x) = 2x - 4$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$x^2 - 4x = x * (x-4) = 0$

$x_1 = 0$ und $x_2 = 4$

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ An der Stelle $x = 0$ ist ein Hochpunkt

Berechnen der y-Koordinate

$f(0) = 0$

Die Funktion hat einen Hochpunkt H(0;0)

$f''(4) = 4 > 0 \Rightarrow$ An der Stelle $x = 4$ ist ein Tiefpunkt

Berechnen der y-Koordinate

$f(4) = \frac{1}{3}4^3 - 2*4^2 = \frac{64}{3} - 32 = -\frac{32}{3}$

Die Funktion hat einen Tiefpunkt $T(4; -\frac{32}{3})$

g) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$

$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2)$

$f''(x) = 3x^2 - 6x + 2$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2) = 0$

$x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow$ An der Stelle $x = 0$ ist ein Tiefpunkt

Berechnen der y-Koordinate

$f(0) = 0$

Die Funktion hat einen Tiefpunkt T(0;0)

$f''(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ An der Stelle $x = 1$ ist ein Hochpunkt

Berechnen der y-Koordinate

$f(1) = \frac{1}{4}1^4 - 1^3 + 1^2 = \frac{1}{4}$

Die Funktion hat einen Hochpunkt $H(4; \frac{1}{4})$

$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow$ An der Stelle $x = 0$ ist ein Tiefpunkt

Berechnen der y-Koordinate

$f(2) = \frac{1}{4}2^4 - 2^3 + 2^2 = 0$

Die Funktion hat einen Tiefpunkt T'(2;0)

Übung 2

$f_a(x) = -x^2 + 2ax + 4 - 2a^2 - 2a$
$f_a'(x) = -2x + 2a$
$f_a''(x) = -2$

a)

notwendige Bedingung $f_a'(x) = 0$

$0 = -2x + 2a \mid + 2x \Leftrightarrow 2x = 2a \mid :2 \Leftrightarrow x = a$

hinreichende Bedingung $f_a'(x) = 0$ und $f_a''(x) \neq 0$

$f_a''(a) = -2 < 0 \Rightarrow$ Es gibt einen Hochpunkt an der Stelle $x = a$

Berechnen der y-Koordinate

$f_a(a) = -a^2 + 2a * a + 4 - 2a^2 - 2a = 4 - a^2 - 2a$

Die Funktion hat einen Hochpunkt $H(a;4-a^2-2a)$

b) Der Hochpunkt liegt am höchsten wenn $4-a^2-2a$ maximal wird, also bestimmen Sie den Hochpunkt der Funktion $g(a) = 4 - a^2 - 2a$

$g(a) = 4 - a^2 - 2a$
$g'(a) = -2a - 2$
$g''(a) = -2$

Notwendige Bedingung $g(a) = 0$
$0 = -2a - 2 \mid +2a \Leftrightarrow 2a = -2 \mid :2 \Leftrightarrow a = -1$

$g''(-1) = -2 \Rightarrow$ an der Stelle $a = -1$ existiert ein Hochpunkt, also liegt für $a = -1$ der Hochpunkt der Funktionenschar am höchsten.

c) Laut a) hat der Hochpunkt folgende Koordinaten:
$x = a$
$y = 4 - a^2 - 2a$

Zur Bestimmung der Kurve alle Hochpunkte, eliminieren Sie a aus den beiden Gleichungen. Setzen Sie einfach die erste Gleichung in die zweite Gleichung ein:

$y = 4 - x^2 - 2x$, das ist die Funktion aller Hochpunkte der Funktionenschar.