FUNKTIONEN: Kettenregel

Gegeben sei eine Funktion $f(x) = u(v(x))$

Die Ableitung $f'(x)$ berechnet sich wie folgt:

$$f'(x) = v'(x) * u'(v(x))$$

Wichtige Ableitungen:

$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Übung 1
Berechnen Sie folgende Ableitungen mit der Kettenregel:

a) $f(x) = \sin(x^2 + 1)$

b) $f(x) = \cos(x^3 - 2x)$

c) $f(x) = e^{x^2}$

d) $f(x) = \sin(\cos x)$

e) $f(x) = \cos(\sin x)$

f) $f(x) = e^{\sin x}$

g) $f(x) = e^{\cos x}$

h) $f(x) = (\sin x)^2$

i) $f(x) = (\cos x)^2$

j) $f(x) = (e^x)^2$

Übung 2
Beweisen sie die Kettenregel. Gegeben sei $f(x) = u(v(x))$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$f'(x) = v'(x) * u'(v(x))$$

Hinweis: Setzen Sie $k := v(x+h) - v(x)$ und erweitern Sie den Differenzenquotienten.

LÖSUNG:

Übung 1

a) $f(x) = \sin(x^2 + 1)$
$f'(x) = 2x * \cos(x^2 + 1)$

b) $f(x) = \cos(x^3 - 2x)$
$f'(x) = (3x^2 - 2) * (-\sin(x^3 - 2x))$

c) $f(x) = e^{x^2}$
$f'(x) = 2x * e^{x^2}$

d) $f(x) = \sin(\cos x))$

$f'(x) = -\sin x * (\cos(\cos x))$

e) $f(x) = \cos(\sin x))$

$f'(x) = \cos x * (-\sin(\sin x))$

f) $f(x) = e^{\sin x}$

$f'(x) = \cos x * e^{\sin x}$

g) $f(x) = e^{\cos x}$

$f'(x) = -\sin x * e^{\cos x}$

h) $f(x) = (\sin x)^2$

$f'(x) = \cos x * 2 \sin x$

i) $f(x) = (\cos x)^2$

$f'(x) = -\sin x * 2 \cos x$

j) $f(x) = = (e^x)^2 = e^{2x}$

$f'(x) = 2 * e^{2x}$

Übung 2

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h} = \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h} * \frac{k}{k}$$

$$= \frac{u(\ v(x) + k\ ) - u(v(x))}{k} * \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

Wenn h $\rightarrow$ 0 geht dann geht k = v(x+h) - v(x) auch gegen 0

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(\ v(x) + k\ ) - u(v(x))}{k} * \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'(v(x)) * v'(x)$$