FUNKTIONEN: Bestimmen von Ableitungen (1)

Unter der **Ableitungsfunktion** f '(x) einer Funktion f(x) versteht man die Funktion, die die Steigung der Tangente an f(x) für alle x angibt.

Zur Bestimmung dieser Ableitungsfunktion berechnen Sie folgenden Grenzwert:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Übung 1
Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$

e) $f(x) = \sqrt{x}$

Übung 2
Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von folgender Funktion $f(x) = x^n$, wobei $n \in \subseteq$.

Sie können folgende Formel verwenden $(x+h)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} * h^i$, wobei gilt $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{1} = n$.

LÖSUNG:

Übung 1

a) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x + h - x}{h} = \frac{h}{h} = 1$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1$

b) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x$

c) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x + h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$
$= 3x^2 + 3xh + h^2$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3x^2$

d) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x - (x+h)}{(x+h)*x}}{h} = \frac{-h}{h*(x+h)*x} = \frac{-1}{(x+h)*x}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{1}{x^2}$

e) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right) * \left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h * \left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{(x+h) - x}{h * \left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} =$
$\frac{1}{\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Übung 2

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} * h^i - x^n}{h} =$$

$$\frac{x^n + n*x^{n-1}*h + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} * h^i - x^n}{h}$$

$$= n*x^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} * h^{i-1}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = n*x^{n-1}$$