

ALGEBRA: 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten



Gegeben sind drei Gleichungen I., II. und III. mit den Unbekannten x, y und z:

$$\begin{aligned} \text{I. } & 6 = x + y + z \\ \text{II. } & 7 = 2x - 2y + 3z \\ \text{III. } & 1 = 3x - 4y + 2z \end{aligned}$$

Diese führt man mit Hilfe von Einsetzungs-, Additions- oder Subtraktionsverfahren auf 2 Gleichungen mit 2 Unbekannte zurück, indem man sich jeweils aus 2 Gleichungen eine Unbekannte eliminiert (hier x):

$$\begin{aligned} \text{IV. } & = 2 \cdot \text{I.} - \text{II.} : 5 = 4y - z \\ \text{V. } & = 3 \cdot \text{I.} - \text{III.} : 17 = 7y + z \end{aligned}$$

Diese 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten löst man dann wieder mit Hilfe von Einsetzungs-, Additions- oder Subtraktionsverfahren:

$$\text{IV.} + \text{V.} : 22 = 11y \quad | :11 \Leftrightarrow y = 2$$

Einsetzen in die Gleichung V.:

$$\text{V. } 17 = 7 \cdot 2 + z \quad | -14 \Leftrightarrow z = 3$$

Einsetzen in die Gleichung I.:

$$\text{I. } 6 = x + 2 + 3 \quad | -5 \Leftrightarrow x = 1$$

Zur Überprüfung der Lösung setzen Sie die Lösung in die drei Gleichungen ein:

$$\begin{aligned} \text{I. } & 6 = 1 + 2 + 3 = 6 \\ \text{II. } & 7 = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 7 \\ \text{III. } & 1 = 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 1 \end{aligned}$$

Übung 1. Bestimmen Sie x, y und z:

a) I. $6 = x + y + z$	b) I. $0 = x + 2y + 3z$
II. $4 = 2x - y + z$	II. $17 = 2x - 3y$
III. $4 = 3x + 2y - 2z$	III. $15 = 2x - 2y + z$
c) I. $6 = 2x + 3y + 4z$	d) I. $10 = 2x - 2y$
II. $7 = 4x - 6y + 12z$	II. $14 = x + 3z$
III. $1 = 6x - 12y + 8z$	III. $0 = -4y - 3z$

Übung 2. Bestimmen Sie die Gleichungen und lösen Sie diese.

- Auf einem Fest kauft Familie Maier 2 Portionen Pommes, 2 Würstchen und 4 Crepes. Sie bezahlen 14,60€. Familie Schmidt kauft sich 2 Pommes, 4 Würstchen und 1 Crepes. Sie bezahlen 13,60€, Für 13,50€ bekommt Familie Ludwig 1 Portion Pommes, 3 Würstchen und 3 Crepes. Wie viel kosten eine Portion Pommes, ein Würstchen und ein Crepes?
- Vor einem Jahr war Karl dreimal so alt wie Lisa heute. Vor 2 Jahren war Petra doppelt so alt wie Lisa. Zusammen sind sie heute 23 Jahre alt. Wie alt sind Lisa, Petra und Karl heute?
- Gesucht wird eine dreistellige Zahl. Die Quersumme der gesuchten Zahl ist 6. Vertauscht man die erste und die zweite Ziffer so ist die Zahl um 90 größer als die gesuchte Zahl. Vertauscht man die erste und die dritte Ziffer so ist die Zahl um 198 größer als die gesuchte Zahl. Welche Zahl ist gesucht?

LÖSUNG:

Übung 1

a) I. $6 = x + y + z$
 II. $4 = 2x - y + z$
 III. $2 = 2x + 2y - 3z$
 IV. = I.+II. $10 = 3x + 2z$
 V. = 2*II+III $10 = 6x - z$
 IV. + 2*V. $30 = 15x \quad | :15 \Leftrightarrow x = 2$

Einsetzen in die Gleichung V.

V. $10 = 6*2 - z \quad | -10 \quad | + z \Leftrightarrow z = 2$

Einsetzen in die Gleichung I.

I. $6 = 2 + y + 2 \quad | -4 \Leftrightarrow y = 2$

Überprüfen:

I. $6 = 2 + 2 + 2 = 6$
 II. $4 = 2*2 - 2 + 2 = 4$
 III. $2 = 2*2 + 2*2 - 3*2 = 2$

b) I. $0 = x + 2y + 3z$
 II. $17 = 2x - 3y$
 III. $15 = 2x - 2y + z$
 IV. = I.-3*III. $-45 = -5x + 8y$

$5*II.+2*IV \quad -5 = y$

Einsetzen in die Gleichung IV.

IV. $-45 = -5x + 8 * (-5) \quad | + 40 \Leftrightarrow -5 = -5x \quad | : (-5) \Leftrightarrow x = 1$

Einsetzen in die Gleichung III.

III. $15 = 2 * 1 - 2 * (-5) + z \quad | -12 \Leftrightarrow z = 3$

Überprüfen:

I. $0 = 1 + 2 * (-5) + 3 * 3 = 0$
 II. $17 = 2 * 1 - 3 * (-5) = 17$
 III. $15 = 2 * 1 - 2 * (-5) + 3 = 15$

c) I. $6 = 2x + 3y + 4z$
 II. $7 = 4x - 6y + 12z$
 III. $1 = 6x - 12y + 8z$

IV. $= 2 \cdot \text{I.} - \text{II.} \quad 5 = 12y - 4z$

V. $= 3 \cdot \text{I.} - \text{III.} \quad 17 = 21y + 4z$

IV. + V. $22 = 33y \quad | :33 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}$

Einsetzen in die Gleichung IV.

IV. $5 = 12 \cdot \frac{2}{3} - 4z \quad | -8 \Leftrightarrow -3 = -4z \quad | :4 \Leftrightarrow z = \frac{3}{4}$

Einsetzen in die Gleichung I.

$6 = 2x + 3 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{3}{4} \quad | -5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Überprüfen:

I. $6 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{3}{4} = 6$

II. $7 = 4 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot \frac{3}{4} = 7$

III. $1 = 6 \cdot \frac{1}{2} - 12 \cdot \frac{2}{3} + 8 \cdot \frac{3}{4} = 1$

d) I. $10 = 2x - 2y \quad | :2 \Leftrightarrow 5 = x - y \quad | +y \Leftrightarrow 5 + y = x$
 II. $14 = x + 3z$
 III. $0 = -4y - 3z$

Einsetzen der umgeformten Gleichung I in die Gleichung II.

II. $14 = 5 + y + 3z \quad | -5 \Leftrightarrow 9 = y + 3z$

Addieren der umgeformten Gleichung II. und Gleichung III.:

II. + III. $9 = -3y \Leftrightarrow y = -3$

Einsetzen in die Gleichung II:

II. $9 = -3 + 3z \quad | +3 \Leftrightarrow 12 = 3z \quad | :3 \Leftrightarrow z = 4$

Einsetzen in die Gleichung I.

I. $10 = 2x - 2 \cdot (-3) \quad | -6 \Leftrightarrow 4 = 2x \quad | :2 \Leftrightarrow x = 2$

Überprüfen:

I. $10 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) = 10$

II. $14 = 2 + 3 \cdot 4 = 14$

III. $0 = -4 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 = 0$

Übung 2

a) Sei P der Preis für eine Portion Pommes in €, W der Preis für ein Würstchen in € und C der Preis für einen Crepes.

$$\text{I. } 2P+2W+4C = 14,60$$

$$\text{II. } 2P+4W+1C = 13,60$$

$$\text{III. } 1P+3W+3C = 13,50$$

$$\text{IV. } = \text{I.} - \text{II.} \quad -2W + 3C = 1$$

$$\text{V. } = \text{I.} - 2 \cdot \text{III.} \quad -4W - 2C = -12,40$$

$$2 \cdot \text{IV.} - \text{V.} \quad 8C = 14,40 \quad | :8 \Leftrightarrow C = 1,8$$

Einsetzen in die Gleichung IV.

$$-2W + 3 \cdot 1,8 = 1 \quad | -5,4 \Leftrightarrow -2W = -4,4 \quad | :(-2) \Leftrightarrow W = 2,2$$

Einsetzen in die Gleichung III.

$$1P + 3 \cdot 2,2 + 3 \cdot 1,8 = 13,50 \quad | -12 \Leftrightarrow P = 1,50$$

Überprüfen:

$$\text{I. } 14,60 = 2 \cdot 1,5 + 2 \cdot 2,2 + 4 \cdot 1,8 = 14,60$$

$$\text{II. } 13,60 = 2 \cdot 1,5 + 4 \cdot 2,2 + 1 \cdot 1,8 = 13,60$$

$$\text{III. } 13,50 = 1 \cdot 1,8 + 3 \cdot 2,2 + 3 \cdot 1,8 = 13,50$$

Eine Portion Pommes kostet 1,50€. Ein Würstchen kostet 2,20€ und ein Crepes kostet 1,80€

b) Sei L das Alter von Lisa heute, P das Alter von Petra heute und K das Alter von Karl heute.

$$\text{I. } K-1 = 3L \quad | + 1 \Leftrightarrow K = 3L + 1$$

$$\text{II. } L+P+K = 23$$

$$\text{III. } 2 \cdot (L-2) = P-2 \quad | + 2 \Leftrightarrow P = 2L - 4 + 2 = 2L - 2$$

Einsetzen der umgeformten Gleichungen I. und III. in die Gleichung II.:

$$\text{II. } L + 2L - 2 + 3L + 1 = 23 \Leftrightarrow 6L - 1 = 23 \quad | +1 \Leftrightarrow 6L = 24 \quad | :6 \Leftrightarrow L = 4$$

Einsetzen in die Gleichungen I. und III.

$$\text{I. } K - 1 = 3 \cdot 4 = 12 \quad | + 1 \Leftrightarrow K = 13$$

$$\text{III. } 2 \cdot (4-2) = P-2 \Leftrightarrow 4 = P-2 \quad | + 2 \Leftrightarrow P = 6$$

Überprüfen:

$$\text{I. } 12 = 13 - 1 = 3 \cdot 4$$

$$\text{II. } 23 = 4 + 6 + 13 = 23$$

$$\text{III. } 4 = 2 \cdot (4-2) = 6 - 2 = 4$$

Lisa ist heute 4 Jahre alt. Petra ist heute 6 Jahre und Karl 13 Jahre alt.

c) Sei x die erste Ziffer, y die zweite Ziffer und z die dritte Ziffer.

$$\text{I. } x + y + z = 6$$

$$\text{II. } 100y + 10x + z - 90 = 100x + 10y + z \quad | -10x \quad | -10y \quad | -z \Leftrightarrow 90y - 90 = 90x \quad | :90 \Leftrightarrow y - 1 = x \quad | +1 \\ \Leftrightarrow y = x + 1$$

$$\text{III. } 100z + 10y + x - 198 = 100x + 10y + z \quad | -x \quad | -10y \quad | -z \Leftrightarrow 99z - 198 = 99x \quad | :99 \Leftrightarrow z - 2 = x \quad | +2 \\ \Leftrightarrow z = x + 2$$

Einsetzen der umgeformten Gleichungen II. und III. in die Gleichung I.

$$\text{I. } x + x + 1 + x + 2 = 6 \Leftrightarrow 3x + 3 = 6 \quad | -3 \Leftrightarrow 3x = 3 \quad | :3 \Leftrightarrow x = 1$$

Einsetzen in die umgeformten Gleichungen II. und III.:

$$\text{II. } y = 1 + 1 = 2$$

$$\text{III. } z = 1 + 2 = 3$$

Überprüfen:

$$\text{I. } 6 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\text{II. } 123 = 100 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 3 - 90 = 100 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 3 = 123$$

$$\text{III. } 123 = 100 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 1 - 198 = 100 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 3 = 123$$

Die gesuchte Zahl ist 123.