ALGEBRA: Lösen von Quadratischen Gleichungen

Für das Lösen von quadratischen Gleichungen ergänzen Sie eine Zahl, so dass Sie eine binomische Formel erhalten, dann können Sie weiter auflösen:

Gegeben sei folgende Gleichung:

$x^2 - 6x = -8$ (2. Binomische Formel $a^2 - 2a*b + b^2 = (a-b)^2$
hier $x = a \Rightarrow 2*b = 6 \mid :2 \Leftrightarrow b = 3 \Rightarrow b^2=9$)

$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9 = 1$

$(x-3)^2 = 1 \mid \pm\sqrt{}$

$x_{1,2} - 3 = \pm 1 \mid + 3$

$x_1 = 2$ und $x_2 = 4$

Nun kann aber auch folgender Fall auftreten, dass Sie nicht die Wurzel ziehen können, weil auf der einen Seite eine negative Zahl steht, dann ist die Gleichung nicht lösbar.

$x^2 - 6x = -10$ (2. Binomische Formel $a^2 - 2a*b + b^2 = (a-b)^2$
hier $x = a \Rightarrow 2*b = 6 \mid :2 \Leftrightarrow b = 3 \Rightarrow b^2=9$)

$x^2 - 6x + 9 = -10 + 9 = -1$

$(x-3)^2 = -1 \mid \pm\sqrt{}$

$\Rightarrow$ **Gleichung ist nicht lösbar**

1. Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $x^2 - x = 6$

b) $3x^2 + 6x = 9$

c) $9x^2 + 18x + 8 = 0$

d) $2x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}$

---

2. Für welche a $\in$ P existiert keine, eine oder zwei Lösungen?

a) $x^2 + 2x + a = 0$

b) $x^2 + a * x + \frac{9}{4} = 0$

c) $x^2 + a * x + \frac{a^2}{4} = 0$

---

3. Lösen Sie folgende Formel nach x auf. Welche Bedingungen müssen für p und q gelten, dass die Gleichung lösbar ist?

$x^2 + p * x + q = 0$

LÖSUNG:

Übung 1

a) $x^2 - x = 6 \mid + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$x^2 - 2*\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{24}{4} + \frac{1}{4}$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \mid \pm\sqrt{}$

$x_{1,2} - \frac{1}{2} = \pm\frac{5}{2} \mid + \frac{1}{2}$

$x_1 = -2$ und $x_2 = 3$

b) $3x^2 + 6x = 9 \mid : 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 3 \mid +1^2$

$x^2 + 2x + 1 = 4$

$(x+1)^2 = 4 \mid \pm\sqrt{}$

$x_{1,2} + 1 = \pm 2 \mid - 1$

$x_1 = -3$ und $x_2 = 1$

c) $9x^2 + 18x + 8 = 0 \mid : 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x + \frac{8}{9} = 0 \mid - \frac{8}{9} \Leftrightarrow x^2 + 2x = -\frac{8}{9} \mid + 1^2$

$x^2 + 2x + 1^2 = \frac{1}{9} \mid \pm\sqrt{}$

$x_{1,2} + 1 = \pm\frac{1}{3} \mid -1$

$x_1 = -\frac{4}{3}$ und $x_2 = -\frac{2}{3}$

d) $2x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{2}{3} \mid : 2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{1}{3} \mid + \left(\frac{1}{12}\right)^2$

$x^2 + \frac{1}{6}x + \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{48}{144} + \frac{1}{144} = \frac{49}{144}$

$(x + \frac{1}{12})^2 = \frac{49}{144} \mid \pm\sqrt{}$

$x_{1,2} + \frac{1}{12} = \pm\frac{7}{12} \mid - \frac{1}{12}$

$x_1 = -\frac{2}{3}$ und $x_2 = \frac{1}{2}$

Übung 2

a) $x^2 + 2x + a = 0 \mid - a \Leftrightarrow x^2 + 2x = - a \mid +1^2$

$x^2 + 2x + 1^2 = 1 - a$

$(x+1)^2 = 1 - a$

Für a > 1 existiert keine Lösung, da 1 - a < 0 ist und man aus einer negativen Zahl keine Wurzel ziehen kann. Für a = 1 existiert nur eine Lösung, weil 1 - a = 0 und die positive und negative Wurzel aus 0 gleich 0 ist.
Für a < 1 existieren zwei Lösungen.

b) $x^2 + a * x + \frac{9}{4} = 0 \mid - \frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 + a * x = - \frac{9}{4} \mid + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$(x + \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2-9}{4}$

Für -3 < a < 3 existiert keine Lösung, weil dann $\frac{a^2-9}{4} < 0$ ist

Für a = 3 und a = -3 existiert eine Lösung.
Für a > 3 oder a < -3 existieren 2 Lösungen

c) $x^2 + a * x + \frac{a^2}{4} = 0$

$(x + \frac{a}{2})^2 = 0$

Für $a \in$ P existiert eine Lösung $x = - \frac{a}{2}$

Übung 3

$x^2 + p * x + q = 0 \mid - q \Leftrightarrow x + p * x = - q \mid + \left(\frac{p}{2}\right)^2$

$x + p * x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

$(x + \frac{p}{2})^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

Damit Sie die Wurzel ziehen können muss $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ sein

$(x1,2 + \frac{p}{2}) = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 -q}$

$x1 = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 -q} \;\; - \frac{p}{2}$ und $x2 = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 -q}$

Dies nennt man auch die p-q-Formel